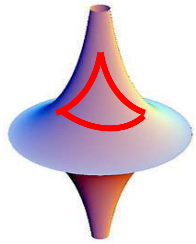
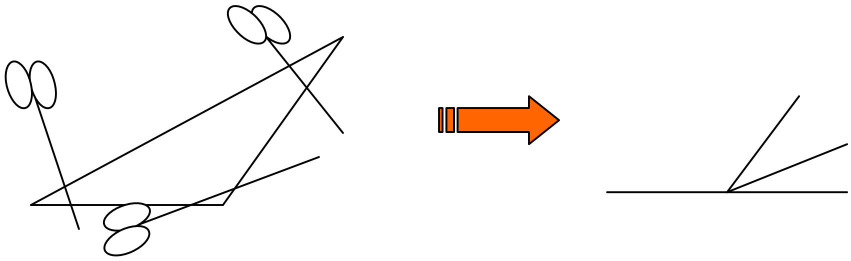
LA GEOMETRIA RAZIONALE



Provate a leggere la seguente definizione:

“Una superficie si dice “**orientabile**” se camminandoci sopra lungo una linea chiusa che non ne oltrepassi i bordi, si può ritornare al punto di partenza con la testa rivolta dalla stessa parte”.

Quale sensazione ne ricavate? Probabilmente, a parte l’idea che il professore sia impazzito, avete provato un senso di inutilità visto che il tutto pare ovvio! Se poi pensate di dover passare pomeriggi a studiare delle “robe” di questo tipo la noia diventa nervoso; e se aggiungo che di qui a qualche mese dovrete studiare una “**dimostrazione**” del fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari ad un angolo piatto, sarete pure arrabbiati: perché dimostrare quello che “si vede”? Non è forse vero che se si ritagliano con un paio di forbici le tre punte di un triangolo e le si dispongono come tre angoli consecutivi, quello che ne risulta è proprio un angolo piatto? Allora perché “dimostrarlo”?

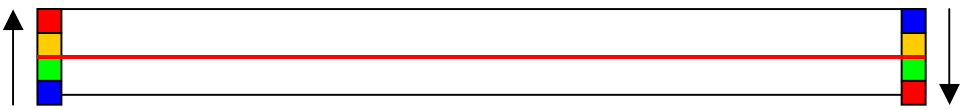


Il motivo è presto detto: **NON E’ VERO che le proprietà che “si vedono” siano sempre vere!!!**

Ad esempio il fatto che le superficie siano orientabili non è niente affatto ovvio! Inoltre provate a disegnare un triangolo con un pennarello sopra una arancia e ritagliatelo con un coltellino: disponendo poi le tre punte consecutivamente non si otterrà più un angolo piatto!

Per quel che riguarda la definizione di superficie orientabile che vi pareva tanto ovvia quanto inutile, divertitevi a seguire le seguenti istruzioni!

1. Ritaglia una striscia di carta a quadretti lunga e stretta; traccia una linea rossa al centro e colora come in figura:



2. Incolla i bordi colorati della striscia facendo coincidere i quadretti con lo stesso colore.
3. Dopo aver osservato la superficie S_1 che hai così ottenuto, prova a scrivere una definizione soddisfacente per una superficie di questo tipo, che i matematici chiamano **“non orientabile”!**
4. Cosa succede se taglia lungo la linea rossa (sup.S_2)? E se si taglia una seconda volta a metà (sup.S_3)? Prova a descrivere le tre superficie che hai ottenuto rispondendo alle seguenti domande:

- ✓ Sono superfici orientabili oppure no?
- ✓ Quali proprietà non hanno in comune tra loro?

Come puoi vedere il mondo della geometria ed in generale della matematica è pieno di sorprese!
La grande matematica polacca **Emi Noether** scrisse che **il matematico è un apprendista stregone**: dopo aver fatto una magia mal riuscita si butta studiare le cose strane che sono uscite dal suo cilindro!!!!
Allora per poter affrontare lo studio serio del mondo “matematico” che ci circonda dobbiamo usare la logica: dare (e poi… studiare!) delle definizioni (sono i colpi di bacchetta magica che fanno uscire gli oggetti strani), e fissare delle ipotesi (il triangolo è disegnato sopra un piano o sopra una arancia?!); infine dimostrare come si comportano per scoprire a volte proprietà inaspettate!

Ecco come si traduce in gergo matematico quello che abbiamo detto sopra:

La GEOMETRIA, così come viene studiata dai matematici, è un insieme di affermazioni o meglio di proposizioni logiche riguardanti certi “enti fondamentali” che sono i **punti**, le **rette** ed i **piani** e tutte le loro composizioni chiamate figure geometriche (=qualsiasi insieme di enti fondamentali).

queste proposizioni si distinguono in:

- ASSIOMI o POSTULATI: sono proposizioni che definiscono gli enti primitivi e si assumono come vere per principio, senza dimostrarle (e che traducono ad esempio il fatto studiare figure disegnate su un piano e non su una arancia, pardon su una sfera)
- TEOREMI: tutte le altre proposizioni, che si dimostrano a partire dagli assiomi mediante le regole della logica (dette **DEDUZIONI** oppure anche INFERENZE logiche[mizzega!]).
  In realtà solo le proposizioni più importanti sono dette teoremi: quelle che servono per la dimostrazione di teoremi “corposi” importanti sono dette LEMMI, mentre le conseguenze deducibili da un teorema sono chiamate COROLLARI.

La Geometria si definisce dunque come un **“sistema ipotetico deduttivo”** perché a partire da delle ipotesi (gli assiomi) si **deducono** tutta una serie di affermazioni.

L’insieme degli assiomi deve soddisfare queste tre proprietà:

- **COERENZA**: ossia gli assiomi, e tutti i teoremi da essi deducibili, non devono essere (ovviamente direi io…) in contraddizione tra di loro
- **INDIPENDENZA**: ciascun assioma non deve poter essere dimostrato utilizzando gli altri.
- **COMPLETEZZA**: se una frase, pardon una proposizione, la si volesse “vera” in una certa geometria ma non fosse dimostrabile a partire dagli assiomi prescelti, allora significa che l’insieme degli assiomi non è completo e deve essere integrato con la proposizione stessa.

Il primo fautore rigoroso di questo metodo fu Euclide, il quale nei suoi Elementi, dopo aver affermato di voler scrivere proposizioni i cui soggetti erano chiamati “punti” e “rette” (enti fondamentali), introdusse quattro proposizioni (i primi quattro postulati di Euclide[1]) e proseguì deducendo da esse ben ventotto proposizioni. Per dimostrare la ventinovesima, a voi nota dalla scuola media: “la trasversale di due rette parallele determina angoli alterni uguali, angoli corrispondenti uguali, angoli coniugati supplementari”, fu costretto a ricorrere ad un quinto assioma che fino ad allora aveva evitato di utilizzare, il famoso V° postulato di Euclide che descriviamo nella sua forma originale nella seconda nota a piè pagina[2].

Il motivo di questo comportamento è con ogni probabilità il seguente: Euclide aveva il sospetto che il quinto postulato fosse deducibile dai primi: il fatto che non fosse così intuitivo ma avesse “l’aspetto” di un teorema portò probabilmente Euclide stesso, sicuramente i suoi primi lettori e poi nel corso dei secoli schiere di matematici a tentarne una dimostrazione. Lo studioso gesuita **Girolamo Saccheri** (1667/1733) cercò di dimostrare il V° postulato per assurdo: ipotizzò cioè che fosse falso e cercò una conseguenza pure falsa. Spingendosi molto in avanti dimostrò diverse proposizioni ma ad un certo punto dedusse una affermazione che ritenne falsa (il suo testuale commento fu “questo <<ripugna>> con la natura della retta”. Era stato dunque sbagliato negare il V° postulato che di

---

1. [1] Si chiede di ammettere che si possa condurre una retta da qualunque punto a qualunque punto.
2. e che una retta finita si possa prolungare a piacere.
3. e che si possa tracciare un cerchio di centro e raggio qualunque.
4. e che tutti gli angoli retti siano uguali.
5. [2] “e che se una retta, incontrando altre due rette, produca due angoli interni, giacenti dalla stessa parte, minori di due angoli retti, quelle rette, prolungate all’infinito si incontrino dalla stessa parte in cui stanno gli angoli minori di due retti.

conseguenza doveva essere è vero. Saccheri ritenne dunque (a torto) di aver dimostrato questo "benedetto" V postulato ma si sbagliava. Infatti nel diciannovesimo secolo il grandissimo matematico

K.F: Gauss dimostrò che il V° postulato era indipendente dagli altri (pensate alla difficoltà di dover dimostrare che una frase non è dimostrabile, quando oltretutto qualcuno prima di lui aveva fornito una presunta dimostrazione!)

Oggi in geometria (piana) si enunciano i cinque postulati di Euclide in forma un po' differente. La scelta dei postulati è infatti arbitraria: l'importante, affinchè risultino un insieme completo ed indipendente è che siano proprio cinque (una qualunque sesta frase sarebbe dimostrabile, mentre sappiamo, grazie a Gauss, che queste cinque sono indipendenti).

Ecco i primi tre che permettono di dedurre le proprietà degli enti fondamentali e quindi di "farcene un'idea" o, come si dice più correttamente, di trovare un "modello":

A – I: Per due punti passa una ed una sola retta.

A – II: Una retta contiene infiniti punti.

A – III: Su un piano esiste almeno una retta e almeno un punto che non vi appartiene.

Da queste tre intuitive affermazioni (intuitive rispetto al modello, all'idea, che noi abbiamo già in testa, di punto e di retta) possiamo dimostrare molte altre proprietà di questi enti dalle più altrettanto intuitive alle più complesse. Ad esempio proviamo a dimostrare che:

TEOREMA: Per un punto passano infinite rette.

Anzi, provate voi a dimostrarlo seguendo questa traccia:
a) Qual è l'unico assioma che parla di un punto isolato? visualizzatelo con un disegno!
b) Osservando il disegno (e dunque "**considerando gli enti del postulato che avete enunciato**") a quale altro postulato potete fare riferimento perché vi dica qualcosa su di essi?
c) Ricordando quello che dovete dimostrare, applicate (sempre disegnando) l'unico postulato che non avete ancora utilizzato, e avrete davanti agli occhi quello che volevate dimostrare (si chiama la "TESI").

Quello che sto per dire è particolarmente IMPORTANTE!!!

I ragionamenti che avete eseguito costituiscono una DIMOSTRAZIONE del teorema: essi e la conclusione a cui siete arrivati **sono validi indipendentemente dal modello (disegno)** che avete usato: una retta per voi era una linea "diritta" sottilissima anzi in astratto pensata senza spessore e di lunghezza infinita. L'OGGETTO DELLA GEOMETRIA NON E' SOLO QUESTO! IL TEOREMA CONTINUA AD ESSERE VERO PER QUALSIASI ALTRO OGGETTO (che continuo a chiamare retta) E CHE SODDISFA I PRIMI TRE ASSIOMI![3]

Quali potrebbero essere questi altri "modelli" di retta? Beh, se si va a disegnare su di una superficie sferica (usate un pennarello ed una ANGURIA!!! oppure pensate ad un mappamondo), dobbiamo considerare "retta" una qualsiasi circonferenza massima tracciata su questa sfera; a questo punto se pensate che per il polo Nord ed il polo sud passano infinite di queste rette (i meridiani) capite che il modello "punto" non può più essere quello di prima altrimenti per i due punti, polo Nord e polo Sud, passerebbero infinite "rette" (i meridiani!) Dunque perché sia soddisfatto il primo assioma è necessario battezzare come "punto" in questo NUOVO MODELLO [NON NUOVA GEOMETRIA!] della geometria basata sugli assiomi 1°) 2°) e 3°) una COPPIA DI "VECCHI" PUNTI; allora la coppia Polo Nord+Polo Sud sono un esempio di "punto" in questo differente modello di geometria. Notiamo con piacere che "osservando il nuovo modello si vede bene" che per un "punto" (COPPIA) passano

[3] fu proprio questo ad ingannare Saccheri: si trovò di fronte ad una retta non "diritta": ma non si trattava di una proprietà assurda bensì di un oggetto lecito logicamente che però era in contrasto col suo "modello di retta". Saccheri aveva inventato una nuova geometria (in cui il modello di retta era ovviamente diverso da quello usuale) ma non se ne era accorto! gli mancavano le basi filosofiche per così dire o se volete l'apertura mentale per accorgersene.

infinite “rette” (MERIDIANI): è ovvio l’avevamo già dimostrato anche se aiutandoci con disegni dell’altro modello.

EBBENE, quello che volevo farvi capire è che la “geometria razionale” non la si studia “OSSERVANDO (un modello) e VEDENDO le proprietà,” come ho scritto sopra tra virgolette, bensì DIMOSTRANDO che certe affermazioni sono vere in qualsiasi contesto.

I TEOREMI cioè, non ci dicono solo le proprietà delle figure che disegniamo ma di **qualsiasi oggetto (enti fondamentali: punti, rette, piani, ecc.) che soddisfi gli assiomi scelti in partenza.**

Completiamo l’esposizione dei cinque postulati della geometria piana Euclidea; si continua a chiamarli di Euclide anche se, ripeto non sono gli stessi; anzi, anche la scelta non è sempre la stessa: in alcuni libri si prende al posto del terzo postulato proprio il teorema che noi abbiamo dimostrato oppure si prendono più postulati del necessario (dunque non indipendenti) allo scopo di diminuire la fatica dello studente nel dimostrare proprio tutto!

IV) postulato: una retta è un insieme ordinato di punti nel quale, deve risultare che:
- presi due punti A e B qualsiasi, esiste sempre un punto C “compreso” tra di essi nel senso che o C segue A e precede B oppure segue B e precede A. (esprime la **“densità”** della retta)
- preso un punto C, esistono sempre due punti A e B tra i quali esso è compreso.(questa parte implica il fatto che la retta non può essere “**chiusa**”)

V) postulato delle parallele: “per un punto non appartenente ad una retta si può condurre una ed una sola retta parallela alla retta data”.

DOMANDA: secondo voi, i 5 postulati che ho elencato, sono indipendenti oppure no?!!

N.B: utilizzando il V° postulato si può ad es. dimostrare che:

- per un punto non appartenente ad una retta si può condurre una sola retta perpendicolare alla retta data;
- la somma degli angoli interni ad un triangolo è di due angoli piatti.

Le dimostrazioni di queste due proprietà sono particolarmente importanti in quanto non sono esse così ovvie: se infatti torniamo a disegnare sulla nostra anguria un triangolo e poi ritagliamo la buccia in modo da disporre i tre angoli consecutivi scopriamo che la loro somma è maggiore di un angolo piatto! così come è chiaro che tutte le “rette” (meridiani) passanti per i poli sono perpendicolari alla retta equatore! Spesso i ragazzi obiettano: perché dobbiamo dimostrare che la somma degli angoli interni…è un angolo piatto, quando basta misurarla? ebbene tale somma non è sempre un angolo piatto! lo è se il triangolo è disegnato sul piano: siccome con i cinque assiomi di Euclide si dimostra che questa benedetta somma è pari ad un angolo piatto ne deduciamo che la geometria che se ne ricava da essi ha come modello le figure di punti e rette disegnate su un piano. **La “Geometria Euclidea” viene dunque anche chiamata “geometria piana”** e, se la si estende allo spazio con l’introduzione di assiomi che definiscono i “piani”, si chiamerà comunque geometria dello spazio piano.

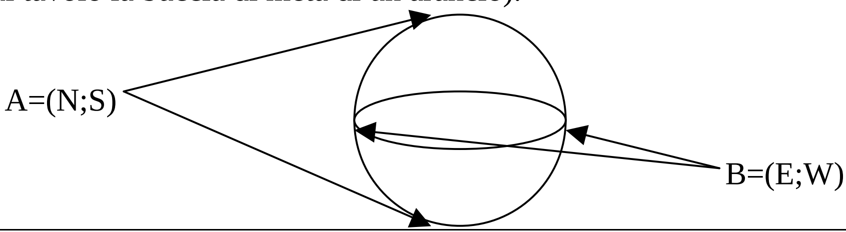
GEOMETRIE NON EUCLIDEE: se si cambia anche uno solo dei cinque assiomi con un’affermazione in contraddizione con quella sostituita si otterrà per deduzioni successive tutta una seria di proposizioni che costituiscono una NUOVA GEOMETRIA, detta non euclidea, nella quale punti e rette saranno rappresentati secondo modelli ovviamente differenti da quello tradizionale della geometria euclidea. Di particolare importanza (sia storica che fisica) le geometrie ottenute negando il “famigerato” V° postulato di Euclide che tanti grattacapi ha dato ai matematici; lo si può negare in due modi:

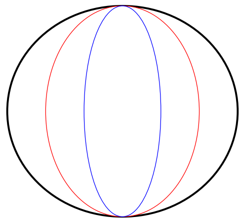
A) Per un punto non appartenente ad una retta NON si possono condurre rette parallele alla retta data.

Questo postulato è equivalente a quello che richiede che si possano condurre infinite rette perpendicolari da un punto esterno ad una retta alla retta stessa. La Geometria che ne deriva avrà dunque come modello naturale le figure di “punti” e “rette” disegnate sopra una sfera. Si chiama GEOMETRIA ELLITTICA o di RIEMANN.[4]

In questa geometria si dimostrerà ad esempio che:

- la somma degli angoli interni ad un triangolo è superiore ad un angolo piatto.
- la lunghezza di una circonferenza è minore di 2π volte il raggio (proprietà osservabile distendendo sul tavolo la buccia di metà di un arancio).





B) Per un punto non appartenente ad una retta si possono condurre INFINITE rette parallele alla retta data.

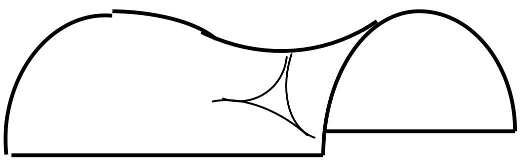
Per la precisione, sarebbe sufficiente richiedere che si possano condurre più di due rette parallele alla retta e si potrebbe dimostrare che ne esiterebbero di conseguenza infinite. Questo postulato è equivalente al quello che richiede che si NON possano condurre, da un punto esterno ad una retta, rette perpendicolari alla retta stessa.
La Geometria così definita si chiama GEOMETRIA IPERBOLICA o di LOBACEVSKY[5]

In questa geometria si dimostra che:

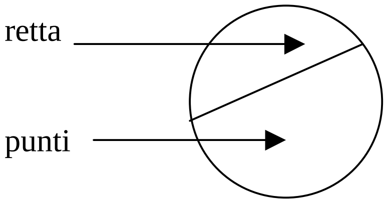
- la somma degli angoli interni ad un triangolo è inferiore ad un angolo piatto.
- la lunghezza di una circonferenza è superiore di 2π volte il raggio.

Si possono individuare due ottimi modelli, completamente diversi, per questa geometria:

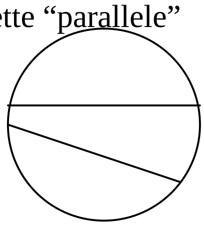
1° modello nel quale “punti” e “rette” sono disegnati su di una superficie fatta a forma di sella di cavallo e chiamata “paraboloide ad una falda”; appare evidente come, disegnando un triangolo su questa superficie, risulti che la somma dei suoi angoli interni sia minore di un angolo piatto.



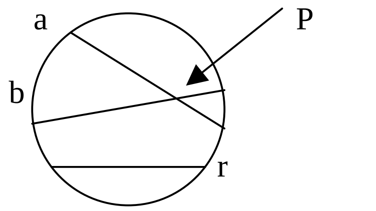
2° modello nel quale i “punti” sono tutti i punti **interni** di un cerchio (quindi l’ambiente è un cerchio privato della sua circonferenza di frontiera, in pratica una pizza… senza crosta!!!) e le “rette” sono le corde di questo cerchio private degli estremi.



rette “parallele”



rette a e b condotte da P e parallele a r



In realtà il modello sopraesposto è un caso particolare del modello fisico più elaborato di POINCARE’ nel quale le “rette” sono archi aperti di circonferenze “perpendicolari” alla “frontiera”.

[***by prof. Torchio***]

[4] Georg Friederick Riemann (1826-1866)
[5] Nikolaj Ivanovich Lobacevsky (1792-1856)