

La meccanica quantistica deve

essere consistente con la meccanica classica nella regione in cui questa è valida.

Come stabilire questa regione? Abbiamo un parametro naturale: la costante h di Planck, che svolge in questo caso il ruolo che era della velocità della luce c per la relatività. Dunque la prima condizione, nota come **principio di corrispondenza di Bohr**, è la seguente:

■ sperimentalmente, tutti i fenomeni caratterizzati da dimensioni fisiche molto più grandi di h (fenomeni macroscopici) sono descritti correttamente dalla meccanica classica.

In secondo luogo, la nuova teoria non deve richiedere l'inserimento di condizioni di quantizzazione *ad hoc* (come quelle di Bohr e Planck), ma tali condizioni devono discendere in modo naturale dalla teoria.

Il punto di partenza è l'ardita ipotesi di De Broglie e, più in particolare, il significato fisico che si debba attribuire all'onda associata ad una particella.

Cerchiamo di capire quale sia il significato fisico dell'onda che, secondo De Broglie, è associata ad una qualsiasi particella.

Si tratta di un'onda materiale, cioè della vibrazione di un mezzo materiale? Oppure di un'onda che assomiglia alle onde elettromagnetiche, che sono vibrazioni di campi, o ancora di qualcos'altro?

Per rispondere, cominciamo col riflettere su una situazione familiare, quella dell'interferenza della luce che attraversa una doppia fenditura (fig. 8a). Secondo la teoria ondulatoria della luce, il fenomeno è facilmente spiegabile.

In un punto P dello schermo, si sovrappongono due onde, le cui ampiezze sono indicate da f_1 e f_2 . L'onda risultante dalla sovrapposizione, l'onda f_{12} , avrà come ampiezza la somma delle ampiezze delle onde f_1 e f_2 nel punto P (fig. 8b):

$$f_{12} = f_1 + f_2 \quad [15]$$

Nello stesso punto, come sappiamo dalla teoria delle onde, l'intensità sarà data dal quadrato dell'ampiezza, cioè:

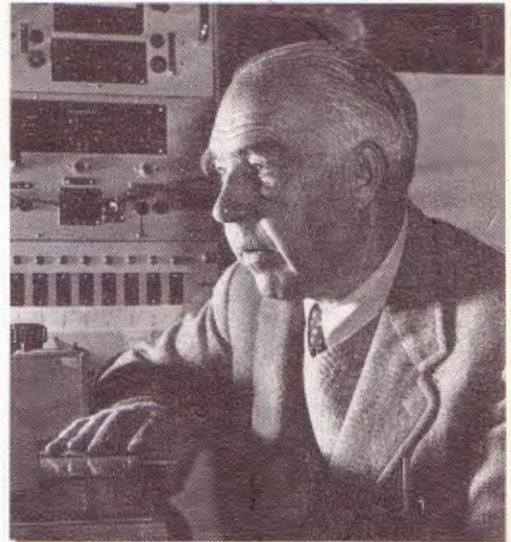
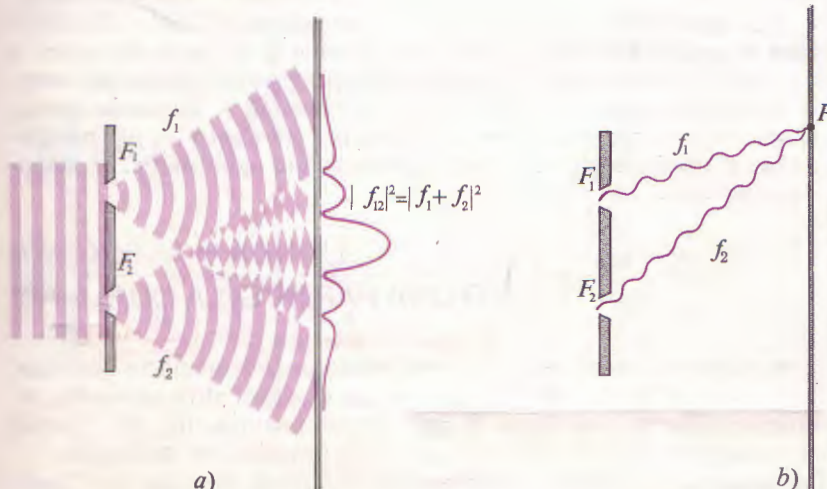
$$I_{12} = f_{12}^2 = (f_1 + f_2)^2 = f_1^2 + f_2^2 + 2f_1f_2 \quad [16]$$

Proviamo ora a dare una descrizione dello stesso fenomeno da un punto di vista corpuscolare.

Sullo schermo vi sono bande scure, nelle quali, ovviamente, non giungono fotoni, e bande chiare, nelle quali l'intensità della luce è proporzionale al numero di fotoni che colpiscono lo schermo.

Dunque, in generale, l'intensità è proporzionale al numero di fotoni, cioè:

$$I_{12} \propto \text{numero fotoni} \quad [17]$$



Niels Bohr (1885-1962). Lo scienziato, attraverso il principio di corrispondenza, interpretò tra l'altro le principali proprietà spettroscopiche e le regolarità chimico-fisiche espresse nella tabella degli elementi di Mendeléeef.

Fig. 8. Interferenza della luce che attraversa una doppia fenditura. Sullo schermo si alternano righe chiare e righe scure: l'intensità luminosa delle righe chiare è massima per la riga centrale e diminuisce rapidamente allontanandosi da questa (a).

L'ampiezza f_{12} dell'onda luminosa che giunge in un qualsiasi punto P dello schermo è data dalla somma delle ampiezze delle onde f_1 e f_2 provenienti da ciascuna fenditura.

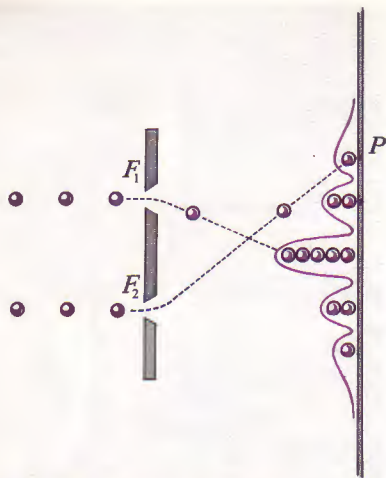


Fig. 9. Distribuzione dei fotoni che giungono da una sorgente S e passano attraverso una delle due fenditure F_1 e F_2 . La probabilità che un fotone ha di finire in un punto P dello schermo è proporzionale all'intensità luminosa in quel punto.

Possiamo così descrivere ragionevolmente l'interferenza, da un punto di vista corpuscolare, nel modo seguente. Quando un fotone attraversa una delle due fenditure subisce una deviazione. Il meccanismo che la regola ci è sconosciuto; esso però è tale da far accumulare i fotoni in certe zone dello schermo e da farli diradare in altre zone.

È possibile ottenere una conferma della bontà di questa descrizione. Prendiamo una sorgente S , così debole che si possa essere certi che venga emesso un solo fotone per volta ad intervalli di tempo anche molto grandi, sostituiamo lo schermo con una carta sensibile alla luce ed aspettiamo. Ogni fotone cadrà in un punto dello schermo, lasciando una traccia. Se in un punto, nel corso del tempo, giungeranno più fotoni, avremo una traccia più marcata, mentre dove non giungeranno fotoni la carta non verrà sensibilizzata (fig. 9).

Se eseguiamo effettivamente l'esperimento, ritroviamo esattamente la figura di interferenza che si ottiene normalmente. Possiamo osservare che, man mano che il tempo passa, le macchie prodotte dai fotoni aumentano e la loro distribuzione, inizialmente piuttosto irregolare, tende a diventare sempre più ordinata. Si formano sempre più nettamente bande chiare e bande scure, come se ogni fotone si comportasse secondo un disegno ben preciso che lo vincola a raggiungere un determinato punto dello schermo.

Possiamo dire che, considerato un fotone qualsiasi, questo ha la massima probabilità di andare a finire in una zona più illuminata dello schermo.

La probabilità che ha un fotone di finire, ad esempio, in un punto P dello schermo, è dunque proporzionale all'intensità della luce in quel punto. Detta $p(P)$ tale probabilità, possiamo scrivere:

$$p(P) \propto I_{12} = f^2 \quad [18]$$

La nostra descrizione corpuscolare dell'interferenza può essere completata dicendo che, pur non conoscendo il meccanismo esatto responsabile della regolare disposizione dei fotoni che generano la figura di interferenza, possiamo calcolare almeno la probabilità che ciascuno di essi ha di giungere in un determinato punto dello schermo.

Ora facciamo un confronto tra la descrizione ondulatoria e quella corpuscolare.

La stessa grandezza, f^2 , è interpretabile come *intensità* nella descrizione ondulatoria e come *probabilità* (a parte un fattore di proporzionalità) in quella corpuscolare.

La descrizione corpuscolare è caratterizzata, dunque, dal fatto che in essa si hanno informazioni probabilistiche. E f che, nella descrizione ondulatoria, è l'ampiezza dell'onda, che cosa è nella descrizione corpuscolare? Sembra ragionevole, per analogia, immaginarsi una specie di onda, di cui f sarebbe l'ampiezza, il cui quadrato, f^2 , è una probabilità. Per quest'ultima ragione, l'onda in questione potrebbe chiamarsi **onda di probabilità**. Non si tratta ovviamente di un'onda materiale: è una funzione matematica la quale, punto per punto e istante per istante, fornisce un numero, l'ampiezza di probabilità f . Elevando questo numero al quadrato possiamo calcolare, in ogni punto (o, più precisamente, in un volumetto ΔV molto piccolo) ed in ogni istante, la probabilità che si trovi un fotone.

1.9

L'ONDA Ψ ASSOCIATA

AD UNA PARTICELLA QUALSIASI *e un'onda di probabilità*

Se ripetessimo l'esperimento di interferenza precedentemente descritto, sostituendo ai fotoni degli elettroni, o una qualsiasi altra particella, otterremmo ancora una figura di interferenza analoga (fig. 10). Questo conferma ulteriormente la correttezza delle intuizioni di De Broglie.

Per analogia, dobbiamo descrivere la situazione dicendo che l'onda

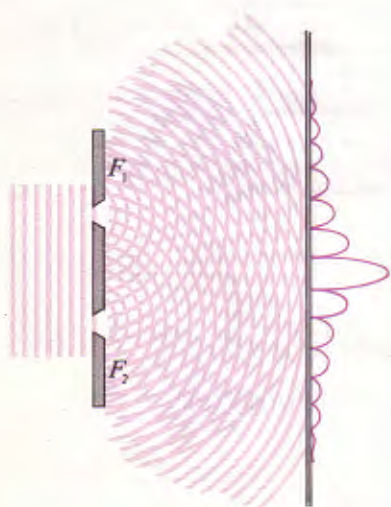


Fig. 10. La figura di interferenza per elettroni o per particelle qualsiasi è analoga a quella ottenuta per i fotoni. Poiché la massa di queste particelle è maggiore di quella del fotone, la lunghezza d'onda dell'onda associata è minore e le frange sono più sottili e ravvicinate.

associata ad una particella qualsiasi è un'onda di probabilità. Essa contiene le informazioni relative alla posizione più probabile, istante per istante, della particella e dipenderà, dunque, dalla posizione x e dal tempo t (supponendo, per semplicità, che il moto della particella si svolga nella sola direzione x). Indicando con Ψ tale onda, possiamo scrivere:

$$\Psi = \Psi(x, t)$$

Secondo la relazione di De Broglie, l'onda associata ad una particella materiale di impulso p ha lunghezza d'onda λ data da:

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

dunque, in generale, la lunghezza d'onda per l'elettrone sarà inferiore rispetto a quella dei fotoni associati alla luce visibile e le frange saranno più ravvicinate. A parte questo fatto, la situazione è, però, del tutto analoga a quella del caso precedente.

Se ripetessimo l'esperimento con particelle molto grandi, ad esempio proiettili di mitragliatrice (fig. 11a), apparentemente non otterremo una figura di interferenza. In realtà, i massimi e i minimi sarebbero così vicini fra loro che non saremmo in grado di rilevarli con i nostri strumenti. La figura che si formerebbe avrebbe l'andamento della linea in colore di figura 11b, che rappresenta la media delle probabilità di punti molto vicini.

Dunque, in generale:

✗ l'onda Ψ associata ad una particella fornisce, punto per punto e istante per istante, un numero il cui modulo quadrato rappresenta la probabilità di trovare la particella in quel punto.

In realtà, per essere più precisi, $\Psi(x, t)$ è in generale un numero complesso, cioè:

$$\Psi = a + ib$$

Il suo quadrato, $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$, è a sua volta un numero complesso, e non può perciò rappresentare una probabilità, che è sempre un numero reale.

Per questa ragione, la probabilità di trovare una particella nel punto x all'istante t , $p(x, t)$, è definita come *modulo quadrato* di Ψ , cioè come prodotto di $\Psi = a + ib$ per il suo complesso coniugato $\Psi^* = a - ib$, che è un numero reale positivo, poiché:

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

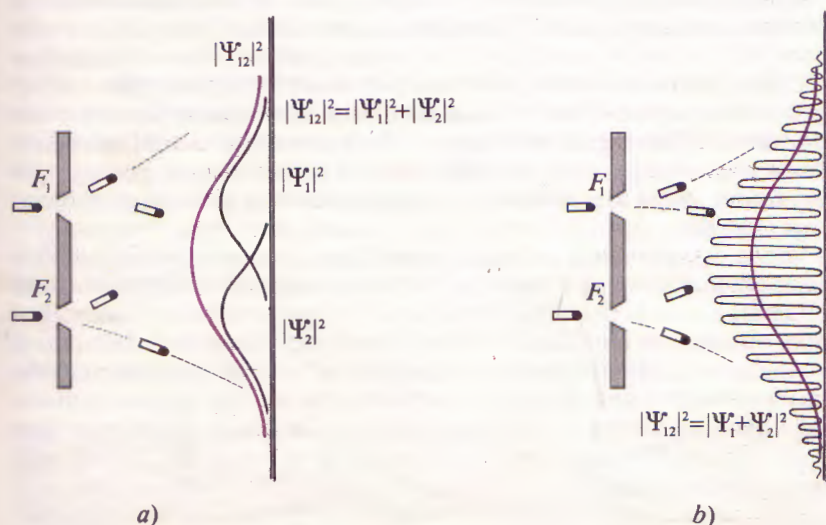


Fig. 11. Usando particelle molto grandi, ad esempio proiettili, i massimi e i minimi sono così ravvicinati che la distribuzione non dà luogo apparentemente ad una figura di interferenza. Si ottiene in realtà una distribuzione che rappresenta la media della probabilità di punti molto vicini.

Dunque la probabilità di trovare la particella in un punto sarà data da:

$$p(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 = \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) \quad [19]$$

Quella fornita è l'unica possibile interpretazione di Ψ ? Per alcuni fisici no, ma storicamente l'interpretazione di Ψ come onda di probabilità e di Ψ^2 come probabilità, sorretta dalla scuola di Copenhagen, fu quella maggiormente esplorata, che diede luogo ad una teoria coerente, in perfetto accordo con i risultati sperimentali.

Prima di chiudere questo paragrafo, cerchiamo di formarci un'idea un po' più concreta dell'onda di probabilità. Che ad un fotone sia associata un'onda non significa che il fotone si muova, oscillando come una nave che naviga sul mare mosso. Significa invece che, se, in un certo istante, ci chiediamo qual è la probabilità che un fotone cada in un certo punto P , a distanza y dal centro dello schermo, spostandosi lungo y questa probabilità aumenta o diminuisce, variando in modo ondulatorio.

1.10

IL PRINCIPIO DI COMPLEMENTARITÀ

Nei paragrafi precedenti abbiamo lasciato un punto in sospeso: ci siamo accontentati di dare una descrizione probabilistica del moto delle particelle. Ci domandiamo ora se non è possibile penetrare più intimamente nei meccanismi che regolano il fenomeno, per riuscire a descrivere, in modo deterministico, il moto di ciascuna particella.

La cosa più semplice da fare potrebbe essere quella di iniziare con una sorta di censimento, per sapere quali particelle sono passate per la fenditura 1 e quali per la fenditura 2. Questa conoscenza è necessaria per giungere almeno a ricostruire la traiettoria di ciascuna particella, informazione preliminare ad ogni altra che, a prima vista, non appare di difficile acquisizione.

Possiamo infatti modificare l'esperimento di interferenza di elettroni (o di fotoni) inserendo qualche dispositivo che, al passaggio di una particella attraverso una fenditura, emetta un segnale. Se le particelle sono emesse dalla sorgente a distanza di tempo l'una dall'altra, possiamo registrare facilmente, per esempio su una lastra fotografica, che la macchiolina formata in quell'istante è dovuta ad una particella che proviene da una determinata fenditura.

Ma a questo punto sorge una difficoltà insormontabile, dovuta al fatto che stiamo compiendo osservazioni nel mondo microscopico. Come si compie un'osservazione? Normalmente, guardando l'oggetto da osservare. Ma vedere un oggetto implica un meccanismo piuttosto complicato: bisogna fare riflettere della luce (o qualche altra particella) sull'oggetto e raccogliere la luce riflessa in qualche modo opportuno, in modo da formare l'immagine dell'oggetto. Per trasmettere una informazione fisica è necessario, cioè, che della materia o dell'energia, per esempio dei fotoni, dopo aver investito l'oggetto osservato, passino all'osservatore (fig. 12).

L'ottica prevede che il *potere di risoluzione*, cioè la capacità di vedere separati due punti dell'oggetto osservato, aumenti al diminuire della lunghezza d'onda della luce impiegata. Ma, per la relazione di De Broglie, minore è la lunghezza d'onda e maggiore è l'impulso. Dunque, se vogliamo vedere nitidamente un oggetto, per esempio un elettrone che passa attraverso una fenditura, dobbiamo colpirlo con un fotone di elevata quantità di moto. Però l'urto modifica in modo tale la traiettoria dell'elettrone che questo finisce per cadere in un punto del tutto diverso da quello in cui sarebbe giunto se non ci fosse stata l'osservazione.

La figura complessiva, generata da tutti gli elettroni osservati, è del tut-

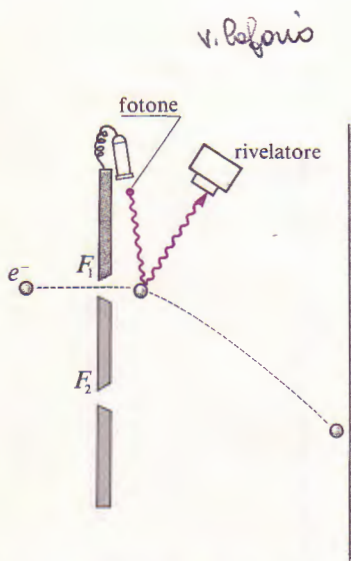


Fig. 12. Per osservare una particella e stabilire da quale delle due fenditure è transitata è necessario inviare contro la stessa dei fotoni di elevata quantità di moto.

Ciò, però, modifica la traiettoria della particella in modo tale che essa andrà a cadere in un punto dello schermo diverso da quello in cui sarebbe caduta se non ci fosse stata l'osservazione.

to diversa da quella che si ottiene in assenza di perturbazione, in quanto è stato introdotto uno spostamento incontrollabile ed irregolare rispetto alla traiettoria che gli elettroni avrebbero seguito in assenza di osservazioni.

In particolare, eseguendo effettivamente l'esperienza, si constata che il risultato *non è più una figura di interferenza*. Gli elettroni sono stati scompigliati in modo tale che si sono distribuiti anche dove prima c'erano delle righe nere.

Comunque si esegua l'esperimento, per rivelare la presenza di una particella in un punto si deve interagire con essa. *L'interazione modifica in modo imprevedibile lo stato dell'oggetto osservato e le informazioni ricavate si riferiscono non al sistema imperturbato, ma al nuovo sistema che si origina dopo la perturbazione.*

Indichiamo con A_0 il sistema che volevamo studiare inizialmente, cioè quello formato dalla sorgente delle particelle, dalle due fenditure e dallo schermo, mentre chiamiamo A_1 quello modificato, nel quale abbiamo inserito il dispositivo che permette di vedere le particelle interagendo con esse. Le informazioni che otteniamo, che ci dicono da quale fenditura è passata ciascuna particella, si riferiscono solo al sistema A_1 e non a quello A_0 . Da un punto di vista fisico, i due sistemi sono assai diversi, date le piccolissime dimensioni degli oggetti in gioco.

A rigore, anche con dei proiettili di mitragliatrice si deve interagire per vederli. Per esempio si possono filmare, e si può perciò con certezza fare un censimento per stabilire quali sono passati per la fenditura 1 e quali per la 2. Per filmarli, però, bisogna illuminarli, cioè colpirli con dei fotoni. In questo caso, la perturbazione prodotta dai fotoni sul moto dei proiettili è del tutto trascurabile: il sistema A_1 , in cui illuminiamo i proiettili, è pressoché identico al sistema A_0 , e i nostri apparecchi di misura non sono in grado di rilevare le differenze.

Si potrebbe ancora fare un ultimo tentativo per ridurre al minimo la perturbazione dovuta all'osservazione, illuminando le particelle con luce di lunghezza d'onda maggiore, che è meno energetica.

In questo caso però, come sappiamo dall'ottica, l'immagine sarebbe meno netta perché diminuirebbe il potere risolutivo. Per diffrazione, si formerebbe un'immagine notevolmente allargata, tale da non consentire più di decidere da quale fenditura è passata la particella. La figura complessiva non sarebbe molto modificata, mantenendo le caratteristiche di una figura di interferenza, ma la nostra descrizione del sistema sarebbe ancora probabilistica.

Non esistono dunque soluzioni pienamente soddisfacenti. Se il sistema presenta un aspetto ondulatorio, appena si cerca di interferire con esso per avere informazioni "corpuscolari", che corrispondono alla conoscenza della posizione di ciascuna particella, si distrugge il sistema precedente e se ne crea uno nuovo.

Se il sistema manifesta l'aspetto ondulatorio, non può perciò manifestare contemporaneamente quello corpuscolare e viceversa. Si può dire anche che ogni esperimento mette in luce solo l'aspetto ondulatorio o solo quello corpuscolare del sistema. I due aspetti sono complementari: non ha perciò senso dire in assoluto che, per esempio, la luce ha natura corpuscolare o natura ondulatoria. È solo relativamente al tipo di esperimento che la luce è un'onda oppure un insieme di corpuscoli, e non è mai possibile che un esperimento metta in luce contemporaneamente i due aspetti.

Questo risultato è uno dei principi fondamentali della meccanica quantistica, e prende il nome di **principio di complementarità**:

esistono fenomeni fisici i quali mostrano aspetti complementari, tra loro incompatibili; un esperimento che permetta di osservare uno dei due aspetti complementari esclude la possibilità di evidenziare l'altro.

Il principio di indeterminazione è la pietra angolare di tutta la costruzione della fisica quantistica. Se esso non valesse, non esisterebbe la perturbazione dovuta all'osservatore e varrebbe ancora la fisica classica, anche per sistemi microscopici. Il fatto che invece esso valga, pone immediatamente in crisi due dei concetti cardine della meccanica classica, quello di traiettoria e quello di causalità.

Infatti, per poter conoscere la traiettoria di una particella bisogna conoscere, istante per istante, sia la posizione sia la velocità. Come sappiamo, questo non è possibile nel mondo microscopico.

Ma anche la causalità viene a cadere, e con essa il determinismo della fisica classica: se non possiamo prevedere con certezza dove andrà a cadere una particella, ma possiamo solo fare affermazioni di tipo probabilistico, non possiamo neanche con certezza provare che un certo evento ne causa un altro.

Un'ultima considerazione: secondo la meccanica quantistica, una particella può essere ferma? La risposta è negativa: se fosse ferma, ne conosceremmo con esattezza posizione ed impulso, in contraddizione con il principio di indeterminazione. Dunque, tutte le particelle dell'universo devono essere in movimento.

⇒ crisi dei concetti
di TRAIETTORIA e
causalità
in ogni istante
(determinismo)

Una qualsiasi onda, per esempio un'onda elastica che si propaghi lungo una corda, un'onda sonora o un'onda elettromagnetica, obbedisce ad una particolare equazione differenziale, detta *equazione delle onde*. Se f indica l'ampiezza dell'onda, nel caso più semplice in cui questa si propaga lungo l'asse x , tale equazione assume la forma:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Per analogia ci si può chiedere se anche la funzione d'onda di probabilità Ψ che descrive una particella qualsiasi obbedisca ad una analoga equazione delle onde. La risposta fu trovata da Schrödinger nel 1926. Egli dimostrò che la Ψ obbedisce ad una equazione che presenta una certa somiglianza con quella delle onde e che si può ricavare dalla equazione che descrive classicamente la particella attuando le seguenti sostituzioni (supponendo per semplicità che la particella si muova lungo l'asse delle x):

$$p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

[23]

Notiamo, per inciso, che questa procedura di sostituzione è un altro modo per esprimere il principio di corrispondenza.

Abbiamo ora gli strumenti per costruire l'*equazione di Schrödinger* cui obbedisce la funzione d'onda Ψ , facendoci guidare dal principio di corrispondenza.