

UNITÀ D3 – parte 1

MISURA DEI DISLIVELLI

RIASSUNTI

QUOTE e DISLIVELLI

- La quota (ortometrica) di un punto P sulla superficie terrestre, è la distanza del punto P dal Geoide, misurata lungo la linea di forza della gravità. Essa viene approssimata con un segmento rettilineo misurato lungo la verticale.
- Il dislivello tra due punti A e B sul terreno, è la differenza della quota del secondo punto rispetto alla quota del primo; dunque:

$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A \quad \Delta_{BA} = Q_A - Q_B \quad \Delta_{BA} = -\Delta_{AB}$$

Nella pratica, il dislivello tra due punti viene misurato con operazioni dette livellazioni, esso viene poi usato per calcolare la quota incognita di un punto:

$$Q_B = Q_A + \Delta_{AB}$$

QUOTE e DISLIVELLI-caso particolare

- Quando la distanza tra i punti A e B è piccola (per precisioni al millimetro approssimativamente 100m) è lecito adottare come superficie di riferimento il piano.
- In questo caso si ha una notevole semplificazione: le verticali per A e B sono parallele e il dislivello Δ_{AB} coincide con la distanza tra piani orizzontali e paralleli passanti per A e per B, dunque è rappresentato dal segmento rettilineo verticale BB'.

PENDENZA

Immaginiamo una linea retta che congiunga i punti A e B sul terreno:

- Si definisce pendenza di questa retta, la tangente dell'angolo α che questa retta forma con l'orizzontale: $p_{AB} = \text{tg}\alpha$
- Considerando il triangolo retto ABB' la pendenza della retta AB può essere ridefinita con una forma più utile e conveniente:

$$p_{AB} = \frac{\Delta_{AB}}{AB'} = \frac{\Delta_{AB}}{D}$$

ERRORE LINEARE DI SFERICITÀ

- I due punti P ed M sono alla stessa distanza dalla superficie di riferimento; dunque essi hanno la stessa quota e il loro dislivello è nullo.
- Se si adotta il piano tangente in P alla sfera locale, i punti P ed M non hanno più la stessa quota e loro il dislivello è il segmento $x=MM'$ (errore di sfericità):

$$x = \frac{D^2}{2R}$$

NOTA:
la figura è fortemente deformata per esigenze espositive

R =raggio della sfera locale (6'370'000m)
 D =distanza tra i due punti

ERRORE LINEARE DI RIFRAZIONE

- La presenza dell'atmosfera, provoca di fatto una riduzione dell'errore di sfericità x di una quantità $y=M'M''$ detto errore lineare di rifrazione.
- Immaginando $M'M''$ come un arco di cerchio di raggio D e angolo al centro ϵ , l'errore lineare di rifrazione può essere calcolato con l'espressione: $y=\epsilon^{rad} \cdot D$:

$$y = K \cdot \frac{D^2}{2R}$$

K =varia tra 0,13 e 0,14

- In definitiva, tenendo conto della contemporanea presenza degli errori di sfericità e rifrazione, l'adozione della superficie di riferimento piana al posto di quella sferica, provoca l'errore complessivo e fornito dalla relazione:

$$e = \frac{1 - K}{2R} \cdot D^2$$

CLASSIFICAZIONE DELLE LIVELLAZIONI

- Le procedure operative attraverso le quali si misura (perlopiù in modo indiretto) il dislivello fra due punti, vengono dette livellazioni.
- Le misure effettuate durante livellazioni possono essere realizzate con teodoliti, o con strumenti appositamente concepiti: i livelli.
- Le livellazioni possono essere classificate in due grandi famiglie in relazione al fatto che, per la misura del dislivello tra due punti, richiedano, o non richiedano, la conoscenza della distanza D tra gli stessi punti.

<p style="text-align: center;">LIVELLAZIONI a VISUALE LIBERA (richiedono la distanza D)</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ livellazione ecclimetrica ▪ livellazione tacheometrica ▪ livellazione trigonometrica ▪ livellazione clisimetrica <p>Pro: l'uso del teodolite ne consente la misura contestualmente alle altre attività planimetriche. Contro: scarsa precisione.</p>	<p style="text-align: center;">LIVELLAZIONI a VISUALE ORIZZONTALE (NON richiedono la distanza D)</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ livellazioni geometriche ▪ livellazione per coltellazione <p>Pro: buona precisione Contro: l'uso di strumenti dedicati ne richiede la misura in sessioni separate, dalle altre attività di misura (ang. dist.).</p>
---	---

MISURA DEI DISLIVELLI: LE LIVELLAZIONI A VISUALE LIBERA (teodolite)

LIVELLAZIONE ECLIMETRICA

- La livellazione eclimetrica si esegue con un qualsiasi goniometro in grado di misurare angoli zenitali (verticali) collocato su un estremo, e una mira sistemata sul secondo estremo del dislivello da misurare. Se la distanza tra i due punti non supera 100-150m la mira può essere una stadia verticale sulla quale si esegue la lettura l al filo medio del reticolo.
- Viene generalmente impiegata quando la distanza tra i due punti, che deve essere nota, è inferiore, a pochissime centinaia di metri ed il relativo dislivello può essere determinato con la precisione di 1÷3 cm /100 m .
- In questo contesto si adotta la superficie di riferimento piana, trascurando, pertanto, gli effetti della sfericità e della rifrazione atmosferica .

$l = \text{lettura al filo medio}$

LIVELLAZIONE ECLIMETRICA

Nella livellazione eclimetrica è necessario misurare: l'altezza strumentale h , l'angolo zenitale φ , la lettura al filo medio l della stadia, e la distanza D tra gli estremi.

La responsabilità della scarsa precisione della livellazione eclimetrica, non è tanto dovuta alla mancata valutazione di sfericità e rifrazione, quanto alla necessità di misurare (in modo precario) l'altezza strumentale h , e nell'utilizzare la distanza D , con i suoi inevitabili errori.

$$\Delta_{AB} = AO + MN - NB$$

$$\Delta_{AB} = h + D \cdot \cotg\varphi - l$$

LIVELLAZIONE TACHEOMETRICA

- Nella livellazione eclimetrica la distanza D tra gli estremi potrebbe essere misurata in modo indiretto con l'espressione : $D = K S \text{sen}^2\varphi$.
- Sostituendo D nella precedente espressione si ottiene una diversa forma del dislivello denominata livellazione tacheometrica che veniva usata nella celerimensura classica (ora in disuso):

$$\Delta_{AB} = h + K \cdot S \cdot \text{sen}\varphi \cdot \text{cos}\varphi - l$$

$K=100$ (costante distanziometrica)
 $S=(l_s-l)$ (lettura superiore-lettura inferiore)

LIVELLAZIONE CON LA STAZIONE TOTALE

- La livellazione eclimetrica può essere effettuata con la stazione elettronica. Se la stazione è stata configurata inizialmente (inserimento di Q_A , h_A , h_P) essa fornisce direttamente sul display la misura del dislivello Δ_{AB} tra punto di stazione e punto collimato). In caso contrario lo strumento fornisce sul display la misura del dislivello parziale Δ^* tra il centro dello strumento e il centro del prisma riflettente.
- In questo caso sostituendo Δ^* al posto di $MN=D \cdot \cotg\varphi$ nella espressione della livellazione eclimetrica si ottiene:

$$\Delta_{AB} = h + \Delta^* - h_P$$

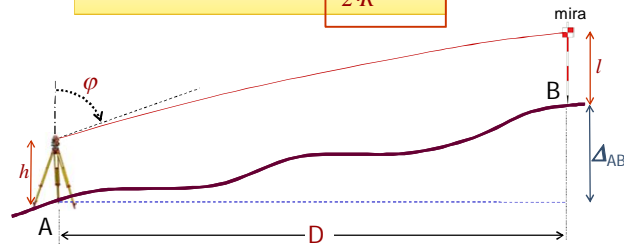
Osserviamo, tuttavia, che l'uso della stazione non migliora di molto la precisione nella misura del dislivello. Infatti rimane l'incertezza nella misura dell'altezza strumentale h che da sola condiziona la precisione della misura.

LIVELLAZIONE TRIGONOMETRICA (semplificata)

- Se è necessario misurare il dislivello tra due punti A e B posti a distanze superiori a 300-400m con una sola stazione, non è più possibile trascurare gli effetti della rifrazione atmosferica e della sfericità.
- **Semplificando** (ma con $D < 2-4$ Km), possiamo considerare che anche in questo caso si tratti di una livellazione eclimetrica a cui, tuttavia, è necessario aggiungere il termine correttivo costituito dall'errore complessivo di sfericità e rifrazione (e):

$$\Delta_{AB} = h + D \cdot \cotg \varphi - l + \frac{1-K}{2R} \cdot D^2$$

Errore globale di sfericità e rifrazione



13

MISURA DEI DISLIVELLI: LE LIVELLAZIONI A VISUALE ORIZZONTALE

14

LIVELLAZIONI GEOMETRICHE

- Le livellazioni geometriche si eseguono utilizzando uno strumento appositamente concepito per queste operazioni: il livello.
- Con esso si realizza unicamente, ma con precisione, un asse di collimazione orizzontale.
- Con l'uso di questo strumento non è necessario conoscere o misurare la distanza tra i due punti, né misurare angoli o altezze strumentali, ma occorre unicamente effettuare le letture al filo medio del reticolo sulla stadia verticale (battute).
- Questo comporta procedure operative molto semplici, rapide (in quanto non è necessario fare stazione su un determinato punto) e in grado di fornire la misura dei dislivelli con grande precisione (ordine del mm/100m e anche inferiori).



Linea di mira
(orizzontale)

15

CLASSIFICAZIONE DELLE LIVELLAZIONI GEOMETRICHE

- L'uso del livello si basa sul parallelismo delle verticali passanti per gli estremi del dislivello da misurare. Pertanto, in questo ambito, viene adottata come superficie di riferimento il piano tangente (dunque trascurando gli effetti della curvatura terrestre e della rifrazione atmosferica).
- Ciò è ammissibile per distanze livello-stadia SEMPRE inferiori a 100m

CLASSIFICAZIONE

In relazione al numero di stazioni del livello:

- semplici (se il dislivello viene misurato con una sola stazione: $D < 100/200$ m)
- composte (se il dislivello viene misurato con più stazioni: $D > 100/200$ m)

In relazione alla collocazione del livello:

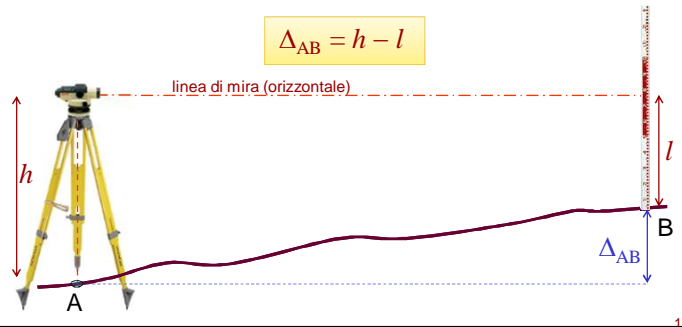
- da un estremo (valenza solo introduttiva e didattica, mai usata nella pratica)
- in prossimità di un estremo (usata quando le precisioni non sono spinte)
- dal mezzo (la più efficiente, usata quando le precisioni sono stringenti)

16

LIVELLAZIONE GEOM. DA UN ESTREMO

• La livellazione geometrica da un estremo si effettua con il livello collocato su un estremo e la stadia verticale sul secondo estremo del dislivello. Questo verrebbe dalla linea di mira e dalla misura precaria dell'altezza strumentale.

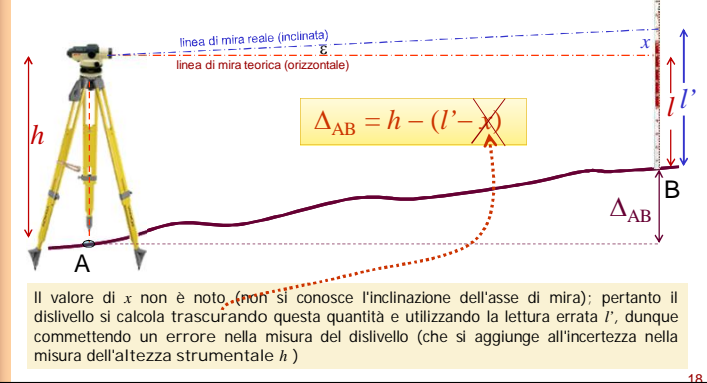
• Essa, di fatto, **non viene mai impiegata**, per svariate ragioni, nella pratica operativa, ma possiede solo interesse in ambito teorico e didattico. A testimonianza di ciò nessun livello è provvisto di piombino ottico per consentire la messa in stazione su un punto prestabilito (come richiesto da questo metodo).



LIVELLAZIONE GEOM. DA UN ESTREMO

• In realtà la linea di mira del livello non può essere perfettamente orizzontale, a causa degli errori di rettifica del livello e dei suoi dispositivi.

• La linea di mira sarà allora inclinata (verso l'alto o verso il basso), anche se di piccolissime entità ϵ , causando l'errata lettura alla stadia l' al posto della lettura corretta l , con l'errore x [$l = l' - x$].



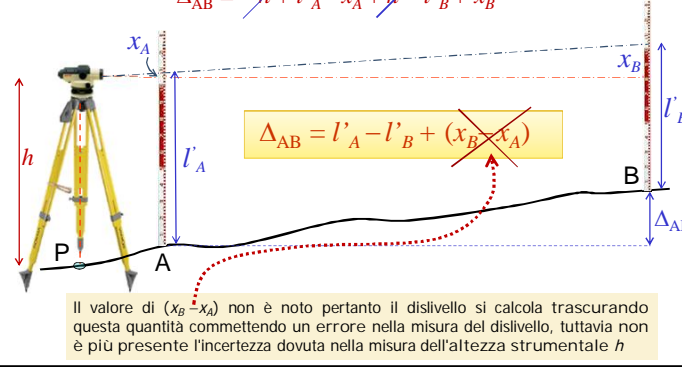
Il valore di x non è noto, (non si conosce l'inclinazione dell'asse di mira); pertanto il dislivello si calcola trascurando questa quantità e utilizzando la lettura errata l' , dunque commettendo un errore nella misura del dislivello (che si aggiunge all'incertezza nella misura dell'altezza strumentale h)

LIV. GEOM. PROSSIMITÀ DI UN ESTREMO

In questo metodo il livello non viene collocato su uno dei due estremi A e B, ma viene posto su un altro punto generico P scelto a piacere (dunque non segnalato) più vicino a uno dei due estremi (rispetto all'altro), in generale fuori dall'allineamento AB.

$$\Delta_{PA} = h - l'_A + x_A \quad \Delta_{PB} = h - l'_B + x_B \quad \text{essendo: } \Delta_{AB} = \Delta_{AP} + \Delta_{PB}$$

$$\Delta_{AB} = -h + l'_A - x_A + h - l'_B + x_B$$



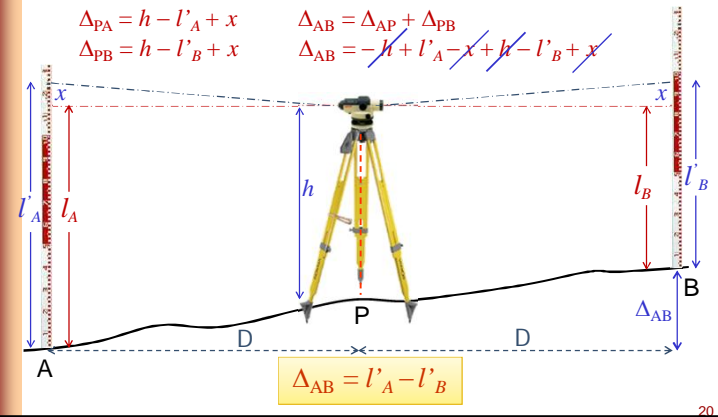
Il valore di $(x_B - x_A)$ non è noto pertanto il dislivello si calcola trascurando questa quantità commettendo un errore nella misura del dislivello, tuttavia non è più presente l'incertezza dovuta nella misura dell'altezza strumentale h

LIVELLAZIONE GEOMETRICA DAL MEZZO

In questo metodo il livello viene collocato su un punto generico P scelto a piacere ma approssimativamente **equidistante** dagli estremi A e B, in generale fuori dall'allineamento AB. Così viene annullato l'errore causato dalla imperfetta orizzontalità della linea di mira (infatti essendo $PA \cong PB$ dovrà anche essere: $x_A = x_B = x$).

$$\Delta_{PA} = h - l'_A + x \quad \Delta_{AB} = \Delta_{AP} + \Delta_{PB}$$

$$\Delta_{PB} = h - l'_B + x \quad \Delta_{AB} = -h + l'_A - x + h - l'_B + x$$



LIVELLAZIONE GEOMETRICA DAL MEZZO

- Nella livellazione geometrica dal mezzo, il dislivello viene misurato con la differenza tra la lettura al filo medio sulla stadia posta sul primo estremo A (battuta indietro o controbattuta), e quella analoga eseguita sul secondo estremo B (battuta in avanti o battuta)
- Essa consente di ottenere precisioni variabili da qualche millimetro fino a qualche decimo di millimetro (in relazione alla strumentazione usata)
- Essa, inoltre, è anche la livellazione più rapida da eseguire

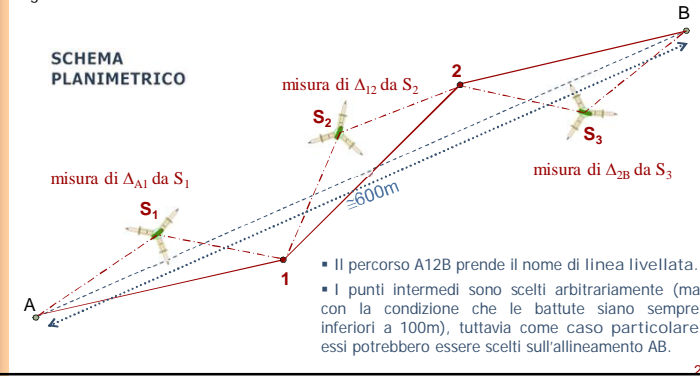
I VANTAGGI DELLA LIVELLAZIONE GEOM. DAL MEZZO

1. non occorre misurare l'altezza strumentale (dunque prescindendo dalle incertezze della sua misura)
2. si annullano gli errori di orizzontalità della linea di mira, della curvatura terrestre e della rifrazione atmosferica (per effetto della equidistanza dei punti estremi da quello di stazione)
3. la distanza fra i due estremi può raggiungere circa 200m, (100+100) cioè il doppio di quella consentita dalla livellazione da un estremo;
4. è possibile determinare dislivelli paragonabili, alla lunghezza della stadia;
5. non è necessario far stazione su un punto definito ma su uno arbitrario.

21

LIVELLAZIONE COMPOSTA DAL MEZZO

- La livellazione geometrica composta dal mezzo, viene usata quando si deve misurare il dislivello tra due punti A e B distanti più di 200m.
- Si suddivide la distanza complessiva tra i due estremi in tratte parziali (non necessariamente allineate), di lunghezza minore di 200m. In esse si misurano i dislivelli parziali, con una successione di livellazioni semplici dal mezzo, che poi saranno sommati algebricamente.



22

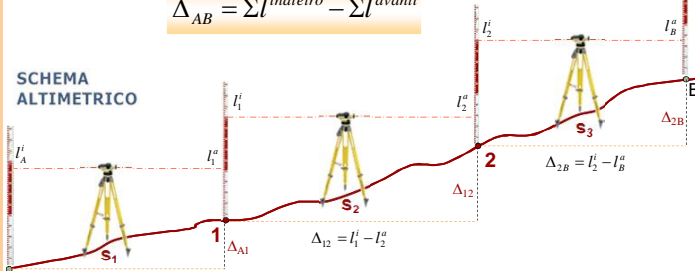
LIVELLAZIONE COMPOSTA DAL MEZZO

Percorrendo la linea livellata da A verso B, collocando il livello nei punti S₁, S₂, S₃, scelti in modo arbitrario (ma equidistanti dagli estremi della tratta), si misurano i dislivelli parziali relativi ai diversi tratti :

$$\Delta_{AB} = \Delta_{A1} + \Delta_{12} + \Delta_{2B} = (l_A^i + l_1^i + l_2^i) - (l_1^a + l_2^a + l_B^a)$$

$$\Delta_{AB} = \sum l^{indietro} - \sum l^{avanti}$$

SCHEMA ALTIMETRICO



- le letture al f.m. all'indietro *l* sono dette controbattute
- le letture al f.m. in avanti *l* sono dette battute
- Sui punti intermedi sono eseguite sia letture in avanti, sia all'indietro; mentre sugli estremi solo in avanti oppure solo all'indietro.

23

REGISTRO DELLA LIVELLAZIONE COMPOSTA

Le letture alla stadia della livellazione composta vengono raccolte in un opportuno registro di campagna sul quale si riconoscono essenzialmente due colonne, una per le *battute*, l'altra per le *controbattute* :

Staz.	Punto battuto	Letture f.m. stadia	
		indietro	avanti
S ₁	A	2,215	1,015
S ₂	1	1,986	0,874
S ₃	2	2,124	1,414
S ₄	3	1,819	0,616
	B		
	Σ l indietro	8,144	
	Σ l avanti		3,919
	Dislivello	Δ _{AB} = 8,144 - 3,919 = + 4,225	

Punto battuto	Letture f.m. stadia	
	indietro	avanti
A	2,215	---
1	1,986	1,015
2	2,124	0,874
3	1,819	1,414
B	---	0,616
Σ	8,144	3,919
A	Δ _{AB} = 8,144 - 3,919 = + 4,225	

- i dislivelli parziali Δ_{A1}, Δ₁₂, ... possono (eventualmente) essere calcolati facendo la differenza tra la lettura indietro e quella in avanti del tratto considerato.
- nel registro tali letture vanno individuate diagonalmente.

24

LIVELLAZIONE COMPOSTA CHIUSA

Quando gli estremi del dislivello coincidono esso è nullo. Allora la somma delle battute (letture in avanti) dovrebbe essere uguale a quella delle controbattute (letture indietro). La presenza di errori impedisce il rispetto di questa condizione teorica.

$\Delta_{AA} = \sum l^i - \sum l^a = 0 \Rightarrow \sum l^i = \sum l^a$ condizione teorica

$\sum l^i - \sum l^a = \pm \delta_{\Delta} \neq 0$ errore di chiusura altimetrico

SCHEMA PLANIMETRICO

25

CONTROLLO E COMPENSAZIONE

- L'errore di chiusura altimetrica deve essere contenuto entro i limiti di tolleranza prevista per la misura. $|\delta_{\Delta}| \leq T_a$
- La tolleranza per il controllo dell'errore di chiusura altimetrica, espressa in millimetri, è data da una formula in cui è presente l'errore medio chilometrico μ_k (caratteristico di ciascun livello, e certificato dalla Casa costruttrice), e dallo sviluppo L della linea livellata espressa in Km. $T_a = 3\mu_k \sqrt{L}$
in millimetri
- La compensazione altimetrica (empirica) inizia con il calcolo dello errore unitario K_{Δ} (per m di linea livellata). $K_{\Delta} = -\frac{\pm \delta_{\Delta}}{L}$
- Successivamente si correggono i singoli dislivelli parziali proporzionalmente alla lunghezze delle corrispondenti tratte, e invertendo il segno. $\Delta'_{A1} = \Delta_{A1} + K_{\Delta} \cdot A1$
 $\Delta'_{12} = \Delta_{12} + K_{\Delta} \cdot 12$
 $\Delta'_{23} = \Delta_{23} + K_{\Delta} \cdot 23$

26

PROBLEMI FREQUENTI CON I DISLIVELLI

27

PROBLEMA 1

Determinare la quota di un punto M appartenente all'allineamento tra altri due punti A e B di quote e distanza note (Q_A, Q_B, D), immaginando che il terreno tra essi vari linearmente.

1° modo

$$\frac{\Delta_{AM}}{\Delta_{AB}} = \frac{d}{D} \quad \Delta_{AM} = \frac{d}{D} \cdot \Delta_{AB}$$

$Q_M = Q_A + \Delta_{AM}$

2° modo

$$\Delta_{AM} = p_{AM} \cdot d \quad p_{AM} = p_{AB} = \frac{\Delta_{AB}}{D}$$

$Q_M = Q_A + \Delta_{AM}$

28

PROBLEMA 2 : Determinare la posizione (es. distanza da A) di un punto M di quota nota Q_M , appartenente all'allineamento tra altri due punti A e B di quote e distanza note (Q_A, Q_B, D), immaginando che il terreno tra essi vari linearmente.

1° modo $\frac{\Delta_{AM}}{\Delta_{AB}} = \frac{d}{D}$ $d = \frac{\Delta_{AM}}{\Delta_{AB}} \cdot D$

2° modo $d = \frac{\Delta_{AM}}{p_{AM}}$ $p_{AM} = p_{AB} = \frac{\Delta_{AB}}{D}$

PROBLEMA 3 : Determinare la quota di un punto M di posizione nota (es. noti $AM=d$ e $\alpha'=MAB$), appartenente al piano (falda) definito da tre punti A, B e C di posizione e quote note (a, b, c, Q_A, Q_B, Q_C).

Il problema si risolve conoscendo $p_{AM} = p_{AH}$, in cui H è l'intersezione del lato BC con il prolungamento di AM:

$$Q_M = Q_A + d \cdot p_{AM}$$

- Per calcolare la pendenza $p_{AM} = p_{AH}$ è necessario partire dal triangolo AHB (o da quello AHC) da cui calcolare λ , l

$$l = \frac{c}{\sin \lambda} \sin \alpha'$$

$$AH' = \frac{c}{\sin \lambda} \sin \beta$$
- Ora è possibile calcolare la quota del punto H, comprese tra B e C (problema 1)
$$Q_H = Q_B + l \cdot p_{BC}$$
- Infine si calcola pendenza $p_{AH} = p_{AM}$ che permette la soluzione del problema
$$p_{AH} = \frac{\Delta_{AH}}{AH} = \frac{Q_H - Q_A}{d + MH}$$

PROBLEMA 4 : Determinare la distanza D a cui si incontrano di due semirette di diversa pendenza p_1 e p_2 che partono dagli estremi di un segmento verticale di lunghezza nota h .

1°- p_1 e p_2 concordi

$h = MB - MA$

$h = D \cdot tg \alpha_1 - D \cdot tg \alpha_2$

$h = D \cdot (tg \alpha_1 - tg \alpha_2)$

$h = D \cdot (p_1 - p_2)$

$$D = \frac{h}{(p_1 - p_2)}$$

2°- p_1 e p_2 discordi

$h = MB + MA$

$h = D \cdot tg \alpha_1 + D \cdot tg \alpha_2$

$h = D \cdot (tg \alpha_1 + tg \alpha_2)$

$h = D \cdot (p_1 + p_2)$

$$D = \frac{h}{(p_1 + p_2)}$$